

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 28.06.2022

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

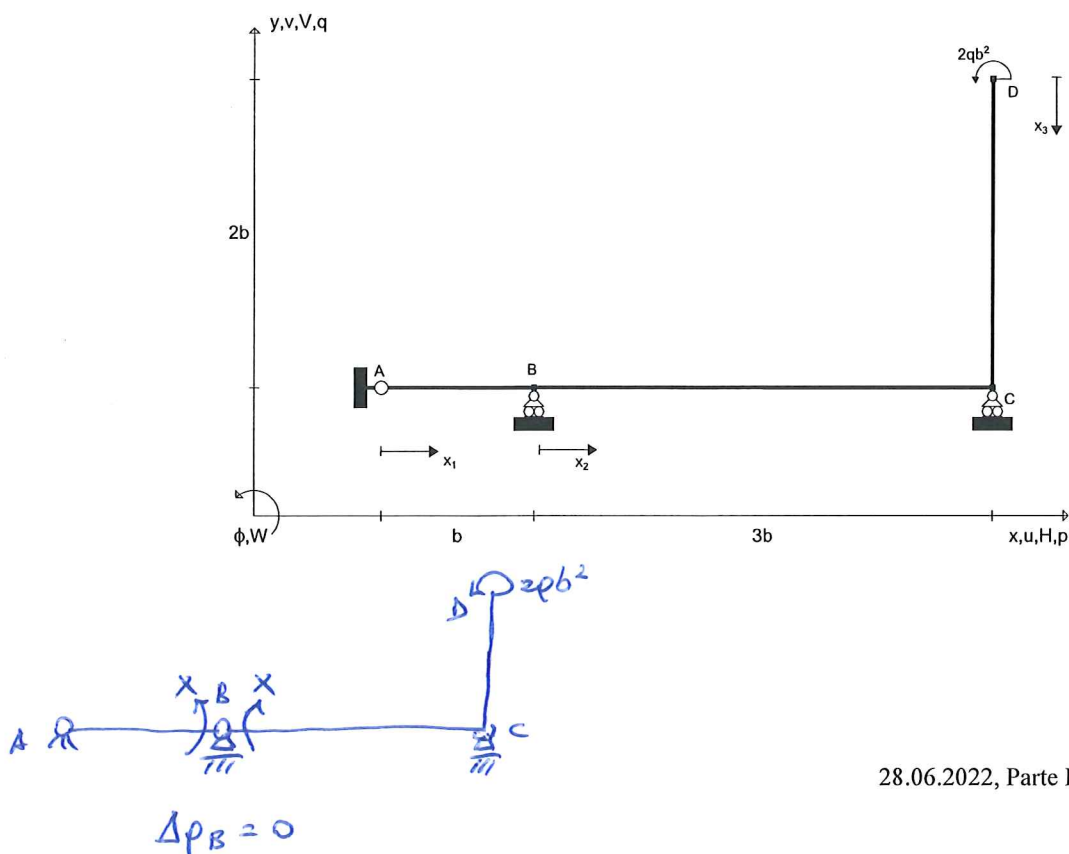
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto C , φ_C .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 28.06.22*001



Esercizio n. 2 (7 punti)

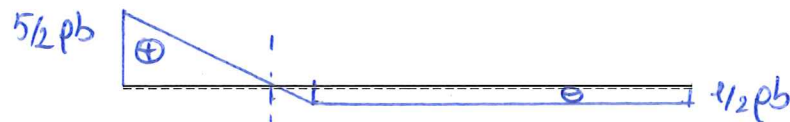
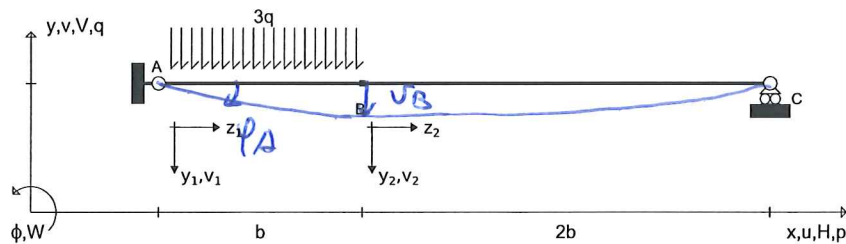
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

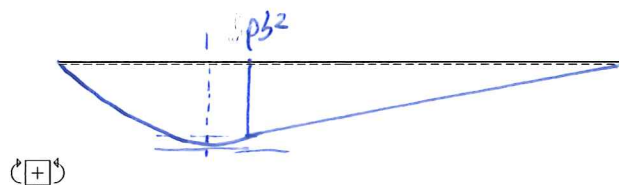
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto A , φ_A ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 28.06.22*001



$\uparrow \oplus \downarrow$



$\uparrow \oplus \downarrow$

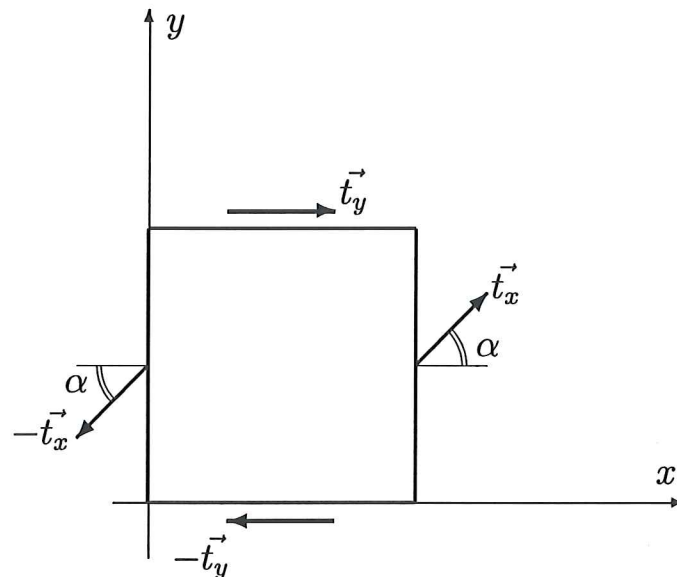
$$\begin{aligned}
 H_A (\rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 5/2 pb; & V_C (\uparrow) &= 1/2 pb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 5/2 pb - 3qz_1; & M_{AB} &= 5/2 pb z_1 - 3/2 q z_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -1/2 qb; & M_{BC} &= qb^2 - 1/2 qb z_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=b) &= v_2'(z_2=0); \\
 \text{c.c in C} &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{12} pb^2 z_1^2 + \frac{1}{8} q z_1^3 + \frac{25}{24} qb^3 z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{5}{4} pb z_1 + \frac{1}{2} q z_1^2 + \frac{25}{24} qb^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} pb^2 z_2^2 + \frac{1}{12} qb z_2^3 + \frac{7}{24} pb^3 z_2 + \frac{3}{4} qb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-pb z_2 + \frac{1}{4} qb z_2^2 + \frac{7}{24} qb^3 \right); \\
 v_B &= \frac{3qb^4}{4EI} (\downarrow); & \varphi_A &= \frac{25qb^3}{24EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -30^\circ$ (sicché $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$; $\sin \alpha = -1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 60$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

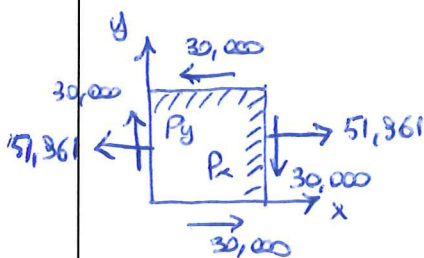
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 51,961$ (MPa); $\sigma_y = 0$ (MPa); $\tau_{xy} = -30,000$ (MPa);

$\sigma_1 = 65,667$ (MPa); $\sigma_2 = -13,705$ (MPa); $\tau_{\max} = 39,686$ (MPa);

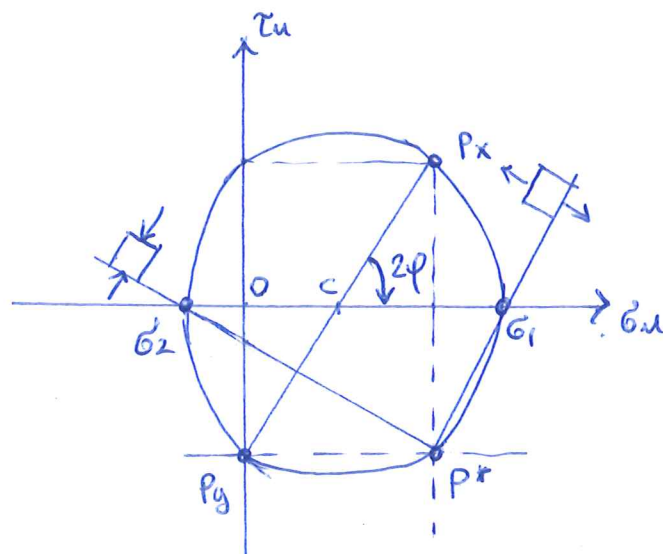
cerchio di Mohr:

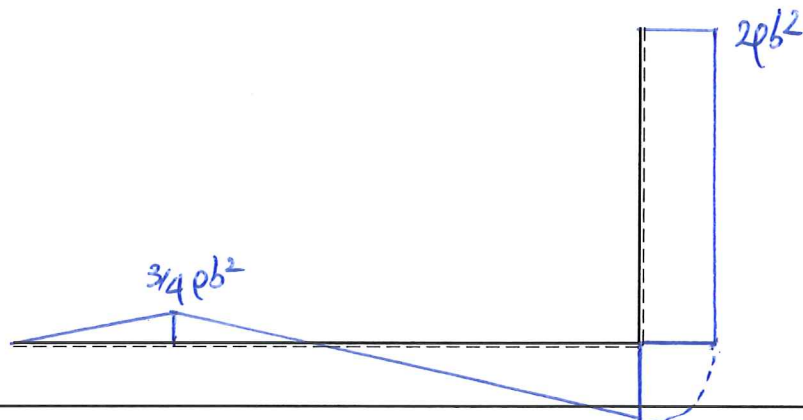
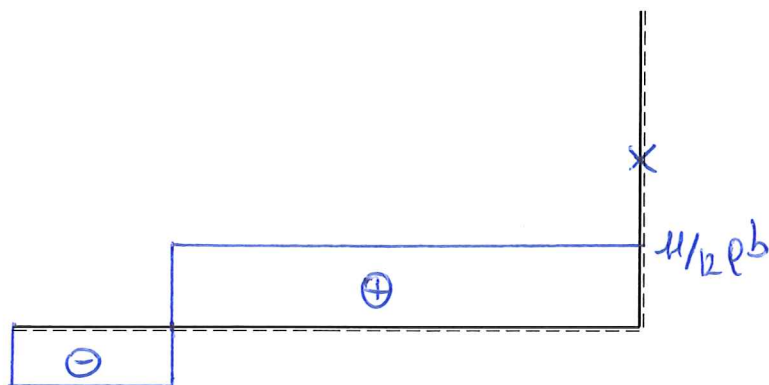
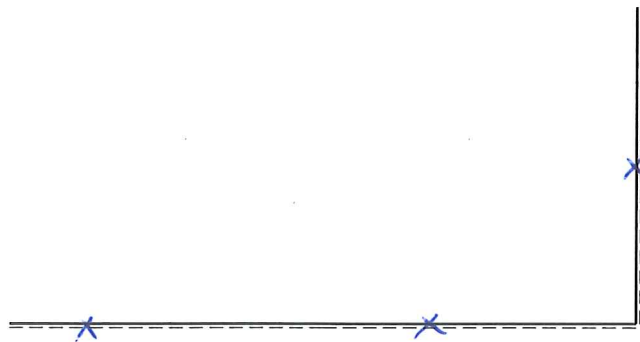
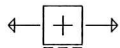


$P_x = (51,961; +30,000)$

$P_y = (0; -30,000)$

$\varphi = -24,553$ (°);





$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= -\frac{3}{4}qb; & V_B (\uparrow) &= \frac{5}{3}qb; & V_C (\uparrow) &= -\frac{11}{12}qb; & M_B (\curvearrowright) &= -\frac{3}{4}qb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -\frac{3}{4}qb; & M_{AB} &= -\frac{3}{4}qb \times x_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= \frac{11}{12}qb; & M_{BC} &= -\frac{3}{4}qb^2 + \frac{11}{12}qb \times x_2; \\
 N_{DC} &= //; & T_{DC} &= //; & M_{DC} &= 2qb^2; \\
 \varphi_C &= \frac{13qb^3}{8en};
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 28.06.2022

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

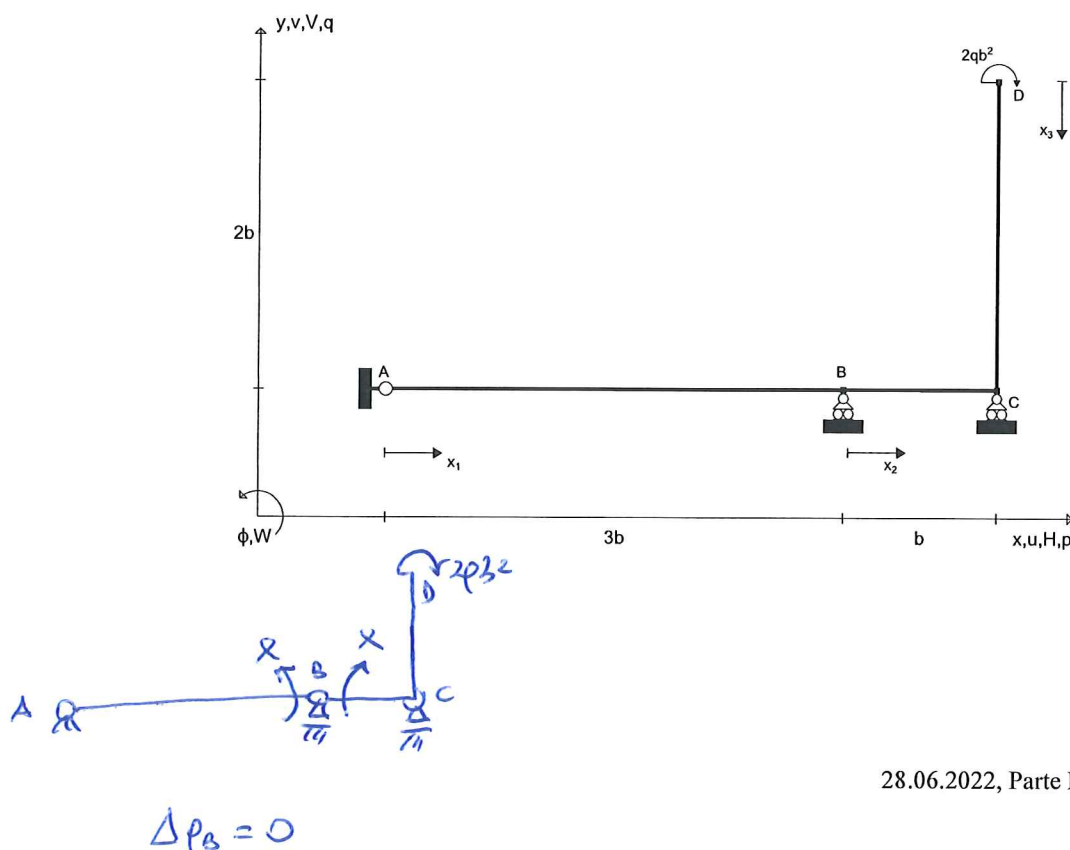
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto C , φ_C .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 28.06.22*002



Esercizio n. 2 (7 punti)

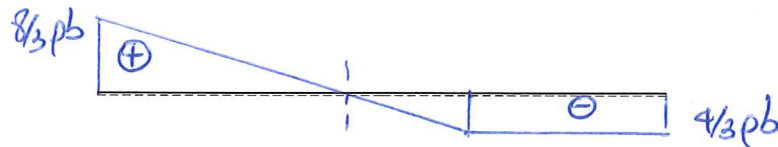
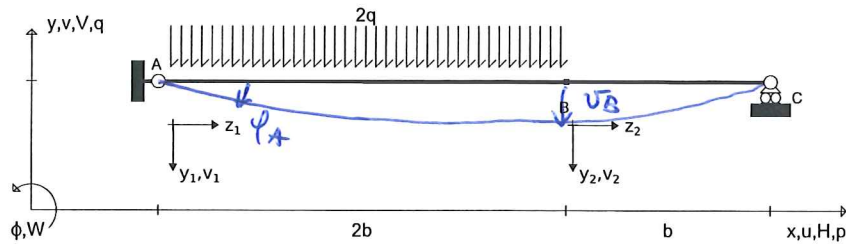
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

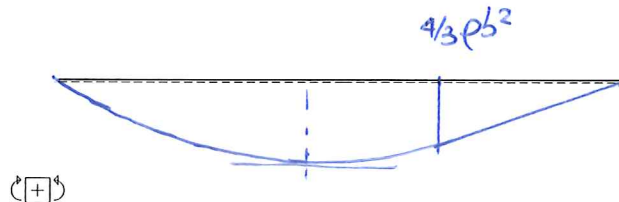
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto A , φ_A ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 28.06.22*002



$\uparrow (+) \downarrow$



$\uparrow (+) \downarrow$

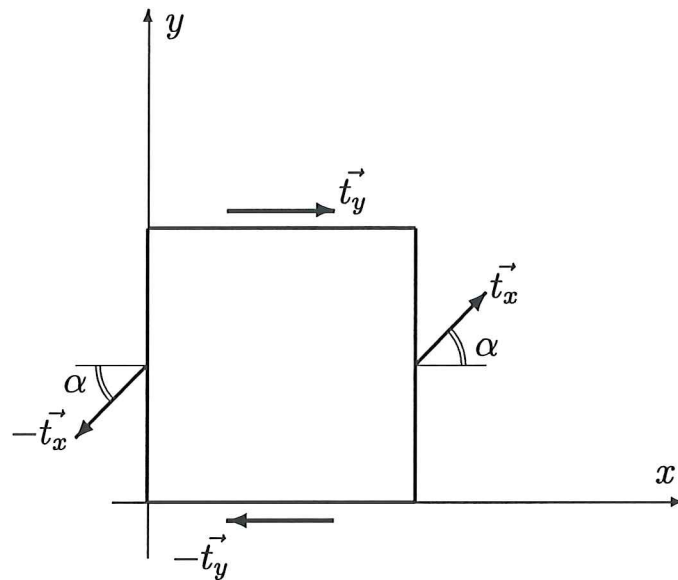
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\hat{u}) &= \frac{8}{3}qb; & V_C (\hat{u}) &= \frac{4}{3}qb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= \frac{8}{3}qb - 2qz_1; & M_{AB} &= \frac{8}{3}qbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -\frac{4}{3}qb; & M_{BC} &= \frac{4}{3}qb^2 - \frac{4}{3}qbz_2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); & v_1'(z_1=2b) &= v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{60} \left(-\frac{4}{3}qb^3z_1^3 + \frac{1}{2}qz_1^4 + \frac{16}{3}qb^2z_1 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{20} \left(-\frac{4}{3}qb^3z_1^2 + \frac{1}{3}qz_1^3 + \frac{16}{3}qb^2 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{60} \left(-\frac{2}{3}qb^3z_2^3 + \frac{1}{3}qb^2z_2^2 - \frac{8}{3}qbz_2 + \frac{4}{3}pb^3 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{20} \left(-\frac{4}{3}qb^3z_2^2 + \frac{2}{3}qb^2z_2 - \frac{8}{3}qb \right); \\
 v_B &= \frac{4qb^4}{5E\lambda} \quad (\downarrow); & \varphi_A &= \frac{16qb^3}{5E\lambda} \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y , rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = +30^\circ$ (sicché $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$; $\sin \alpha = 1/2$) e ha modulo di valore $|t_x| = 60$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

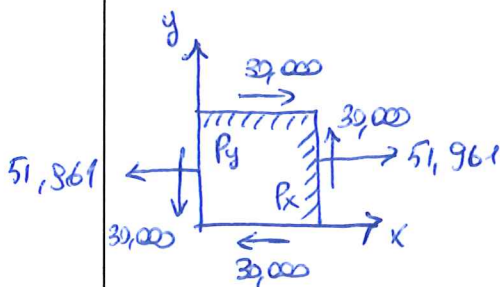
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 51,961 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 39,000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 65,667 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -13,705 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 39,686 \text{ (MPa)};$$

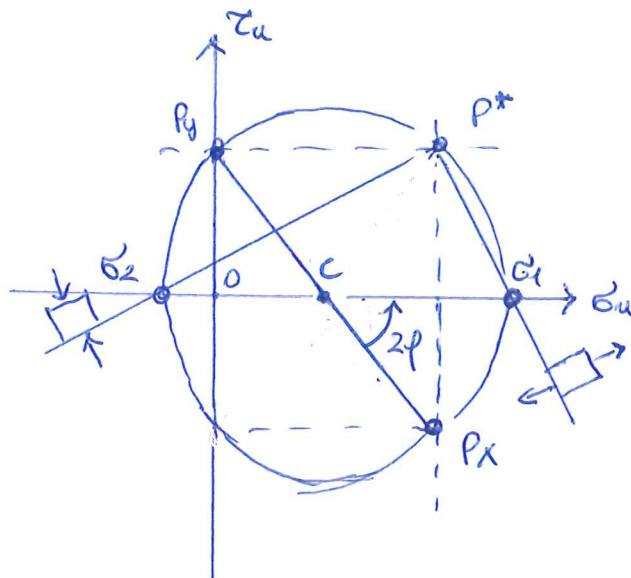
cerchio di Mohr:

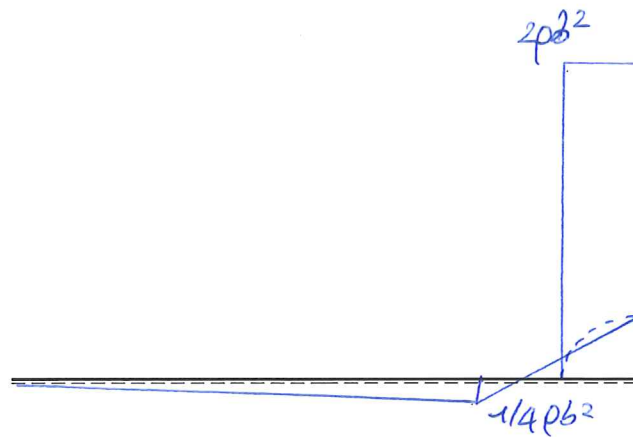
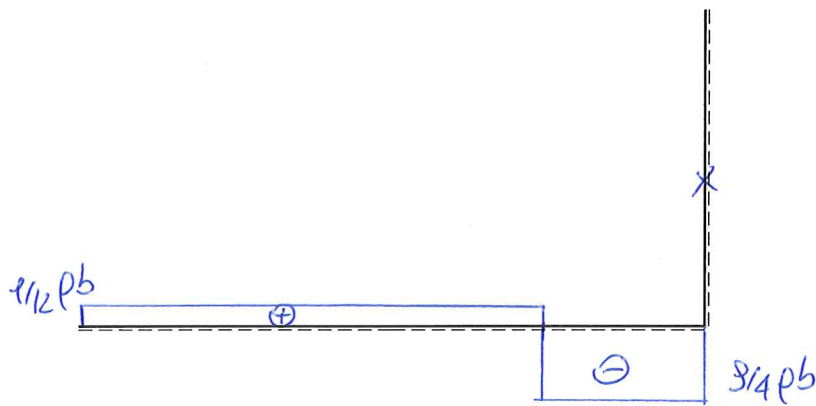
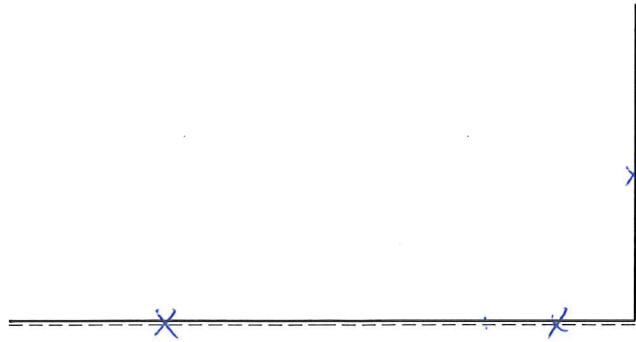
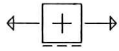


$$P_x = (51,961; -39,000)$$

$$P_y = (0; 39,000)$$

$$\varphi = 24,553 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= \frac{1}{12}pb; & V_B (\uparrow) &= -\frac{7}{3}pb; & V_C (\uparrow) &= \frac{3}{4}pb; & M_B (\curvearrowright) &= \frac{1}{4}pb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= \frac{1}{12}pb; & M_{AB} &= \frac{1}{12}pbx_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -\frac{3}{4}pb; & M_{BC} &= \frac{1}{4}pb^2 - \frac{3}{4}pbx_2; \\
 N_{DC} &= 0; & T_{DC} &= 0; & M_{DC} &= -2pb^2; \\
 \varphi_C &= -\frac{5pb^3}{8EI}
 \end{aligned}$$